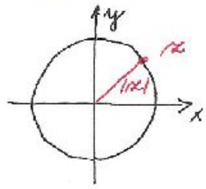
6. Geometrický význam absolutní hodnoty

$|z|$ ... VZDÁLENOST obrazu komplexního čísla z od POČÁTKU $O[0,0]$

=> všechna komplexní čísla, která mají stejnou absolutní hodnotu leží na KRUŽNICI $k(O, r=|z|)$



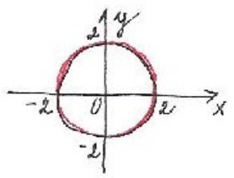
$|z_1 - z_2|$ ... absolutní hodnota rozdílu komplexních čísel určuje JEJICH VZDÁLENOST

Příklady

① Řešte v C:

a) $|z| = 2$ hl. všechna kompl. č., kt. mají od poč. soust. souř. vzd. 2

$z_0 = 0$ => KRUŽNICE $k(O, r=2)$



- POČETNĚ:

$|z| = 2$ $\quad z = a+bi = x+yi$ (ozn.)

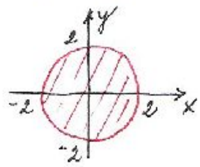
$\sqrt{x^2+y^2} = 2 \quad |^2$

$x^2+y^2 = 4 \quad r=2,\ S[0,0]$

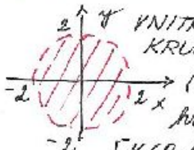
$[x^2+y^2 = r^2$ ... RCE KRUŽNICE $S[0,0]]$

b) $|z| \leq 2$ hl. k. č. z, kt. mají od $O[0,0]$ vzd. ≤ 2

=> KRUH $K(O, r=2)$

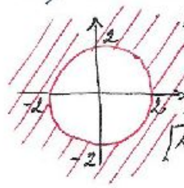


c) $|z| < 2$



VNITŘEK KRUHU (bez hranice) $[K(O, r=2)]$

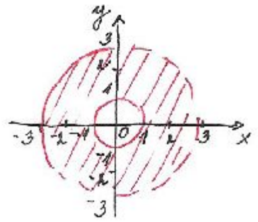
d) $|z| \geq 2$



VNĚJŠEK KRUHU (včetně hranice) $[K(O, r=2)]$

e) $1 \leq |z| < 3$

$|z| \geq 1 \wedge |z| < 3$



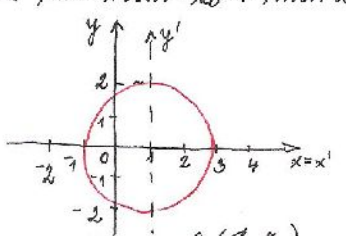
MEZIKRUŽÍ $k_1(O, r=1),\ k_2(O, r=3)$ bez hranice $k_2(O, r=3)$

② Řešte v C

a) $|z-1| = 2$

nul. bod $z_0 = 1 = [1,0]$

- hl. všechny body z, kt. mají od nul. bodu $z_0 = 1$ vzd. 2

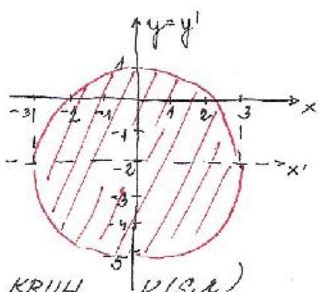


KRUŽNICE $k(S, r)$

$S[1,0],\ r=2$

b) $|z+2i| \leq 3$

$z_0 = -2i = [0,-2]$

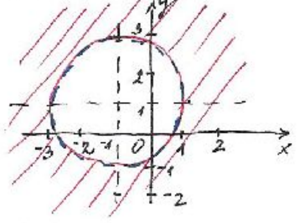


KRUH $K(S, r)$

$S[0,-2]\ \ r=3$

c) $|z+1-i| > 2$

$z_0+1-i = 0 \Rightarrow z_0 = -1+i = [-1,1]$



VNĚJŠEK KRUHU (bez hranice)

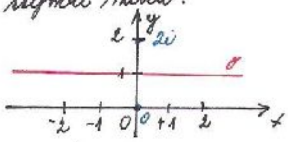
$S[-1,1],\ r=2$

③ Řešte v C

a) $|z-2i|=|z|$

nul. b. $z-2i=0$ $z_0=0$
$z_0=2i$

Hl. b. z, kt. mají od nul. b. stejnou vzdál.



OSA ÚSEČKY s konc. body $0,\ 2i$

početně: $|z-2i|=|z|$ ozn. $z=x+yi$

$|x+yi-2i|=|x+yi|$

$|x+i(y-2)|=|x+yi|$

$\sqrt{x^2+(y-2)^2}=\sqrt{x^2+y^2}\quad |^2$ umocnění

$x^2+(y-2)^2=x^2+y^2$

$\cancel{x^2}+\cancel{y^2}-4y+4=\cancel{x^2}+\cancel{y^2}$

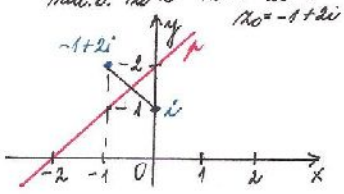
$-4y+4=0$

$4y=4$

$o:\ y=1$ rce přímky $\parallel$ s osou x, proch. $[0,1]$

b) $|z-i|=|z+1-2i|$

nul. b. $z_0=i$ $z+1-2i=0$
$z_0=-1+2i$



OSA ÚSEČKY s konc. body $i,\ -1+2i$

$|z-i|=|z+1-2i|$ ozn. $z=x+yi$

$|x+yi-i|=|x+yi+1-2i|$

$|x+i(y-1)|=|\underbrace{x+1}_{Re}+i(y-2)|$

$\sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}\quad |^2$ umocnění

$x^2+(y-1)^2=(x+1)^2+(y-2)^2$

$\cancel{x^2}+\cancel{y^2}-2y+\cancel{1}=\cancel{x^2}+2x+\cancel{1}+\cancel{y^2}-4y+4$

$-2y=2x-4y+4$

$0=2x-2y+4$

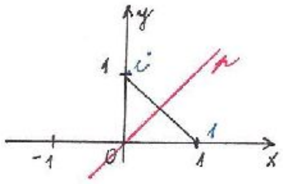
$p:\ x-y+2=0$ rce přímky

$(y=x+2)$

x	0	-2
y	2	0

c) $|z-i|=|z-1|$

$z-i=0$ $z-1=0$
$z_0=i$ $z_0=1$



OSA ÚSEČKY s konc. body $i,\ 1$

$|z-i|=|z-1|$ ozn. $z=x+yi$

$|x+yi-i|=|x+yi-1|$

$|x+i(y-1)|=|\underbrace{x-1}_{Re}+yi|$

$\sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-1)^2+y^2}\quad |^2$ umocnění

$x^2+(y-1)^2=(x-1)^2+y^2$

$\cancel{x^2}+\cancel{y^2}-2y+\cancel{1}=\cancel{x^2}-2x+\cancel{1}+\cancel{y^2}$

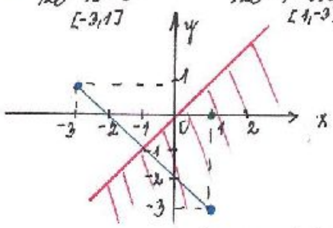
$-2y=-2x$

$p:\ y=x$ rce přímky osa 1. a 3. kvadrantu

④ Řešte v C

a) $|z-i+3|\geqq|z+3i-1|$

$z_0=i-3$ $[-3,1]$ $z_0=1-3i$ $[1,-3]$



Hl. b., kt. mají od nul. b. $-3+i$ vzd. $\geqq$ než od nul. b. $1-3i$

=> POLOROVINA s hraniční přímkou $y=x$ obs. např. $[1,0]$

$|x+yi-i+3|\geqq|x+yi+3i-1|$

$|(x+3)+i(y-1)|\geqq|(x-1)+i(y+3)|$

$\sqrt{(x+3)^2+(y-1)^2}\geqq\sqrt{(x-1)^2+(y+3)^2}\quad |^2$ umocnění

$\cancel{x^2}+6x+\cancel{9}+\cancel{y^2}-2y+\cancel{1}\geqq\cancel{x^2}-2x+\cancel{1}+\cancel{y^2}+6y+\cancel{9}$

$6x-2y\geqq-2x+6y$

$8x\geqq8y$

$x\geqq y$

$y\leqq x$

! hran. př. $y=x$, zvr. bod např. $[1,0]$ - dos. do $y\leqq x$: $0\leqq1$ pl.
=> polorovina obs. tento bod [neplatí-li => opačná, tj. neobs. tento bod]

b) $|z+i|>|z-2i|$

$z_0=-i$ $z_0=2i$

POLOROVINA s hran. př. $y=\frac{1}{2}$ obs. např. $[0,1]$ bez hran. přímky (není připuštěna ($\geqq$) rovnost)

$|x+yi+i|>|x+yi-2i|$

$|x+i(y+1)|>|x+i(y-2)|$

$\sqrt{x^2+(y+1)^2}>\sqrt{x^2+(y-2)^2}\quad |^2$ umocnění

$x^2+y^2+2y+1>x^2+y^2-4y+4$

$2y+1>-4y+4$

$6y>3$

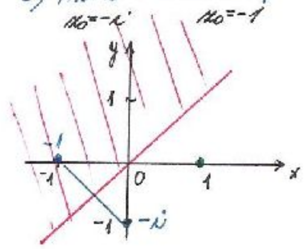
$y>\frac{1}{2}$

hr. př. $y=\frac{1}{2}$, zvr. $[0,1]$

! => $1>\frac{1}{2}$ pl., neobs. hr. př.

c) $|z+i|\geqq|z+1|$

$z_0=-i$ $z_0=-1$



POLOROVINA S HRANIČNÍ přímkou $y=x$

$|x+yi+i|\geqq|x+yi+1|$

$|x+i(y+1)|\geqq|(x+1)+yi|$

$\sqrt{x^2+(y+1)^2}\geqq\sqrt{(x+1)^2+y^2}\quad |^2$ umocnění

$\cancel{x^2}+\cancel{y^2}+2y+\cancel{1}\geqq\cancel{x^2}+2x+\cancel{1}+\cancel{y^2}$

$2y\geqq2x$

$y\geqq x$

hr. př. $y=x$, pro urč. poloroviny zvr. např.

! $[1,0]$ $0\geqq1$ NEPL.

=> OPAČNÁ POLOR.

⑤ Řešte v C

a) $|z| < \left|\frac{1+2i}{3-i}\right|$

2.1 d)

$|z| < \frac{|1+2i|}{|3-i|}$

$|z| < \frac{\sqrt{1^2+2^2}}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}$

$|z| < \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$

dále postup jako př. ①

$|z| < \sqrt{\frac{5}{10}}$ $\left(\sqrt{\frac{5}{10}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$|z| < \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\left[\text{nebo } \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}}\cdot\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{5\cdot10}}{10} = \frac{\sqrt{50}}{10} = \frac{\sqrt{25\cdot2}}{10} = \frac{5\sqrt{2}}{10} = \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

$z_0 = 0$

kl. b., kt. mají od nul. b. mod. $< \frac{\sqrt{2}}{2}$

[POČETNĚ: jako (2a) $x^2+y^2 < \frac{1}{2}$ $(\Rightarrow 2x^2+2y^2<1)$]

b) $\left|\frac{1}{1-i}\right| \leqq |z|$

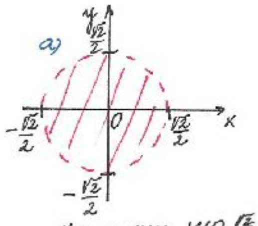
2.1 c)

$|z| \geqq \frac{1}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}$

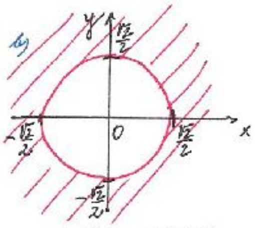
$|z| \geqq \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$|z| \geqq \frac{\sqrt{2}}{2}$ kl. b., kt. mají od nul. b. mod. $\geqq \frac{\sqrt{2}}{2}$

$z_0 = 0$



VNITŘEK KRUHU $K(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$ bez hranice



VNĚJŠEK KRUHU s hranicí $K(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$

c) $\left|z - \frac{1-2i}{i}\right| \leqq \left|z + \frac{1-2i}{i}\right|$

2.2 d)

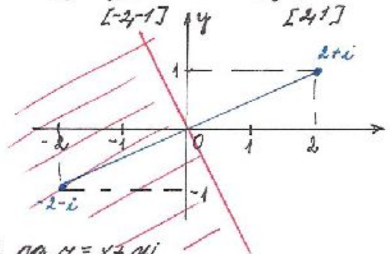
$\left|z - \frac{(1-2i)\cdot(-i)}{\underbrace{i\cdot(-i)}_{1}}\right| \leqq \left|z + \frac{(1-2i)(-i)}{\underbrace{i\cdot(-i)}_{1}}\right|$

$|z - (1-2i)(-i)| \leqq |z + (1-2i)(-i)|$

$|z + i \underbrace{-2i^2}_{+2}| \leqq |z - i \underbrace{+2i^2}_{-2}|$

(*) $|z+i+2| \leqq |z-i-2|$ dále postup jako př. ⑦

$z_0 = -2-i$ $[-2,-1]$ $\quad z_0 = 2+i$ $[2,1]$



(*) dos. za $z = x+yi$

$|x+yi+i+2| \leqq |x+yi-i-2|$

$|(x+2)+i(y+1)| \leqq |(x-2)+i(y-1)|$

$\sqrt{(x+2)^2+(y+1)^2} \leqq \sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}$ $|^2$ umr.

$x^2+4x+4+y^2+2y+1 \leqq x^2-4x+4+y^2-2y+1$

$4x+2y \leqq -4x-2y$

$8x+4y \leqq 0$

$2x+y \leqq 0$

$y \leqq -2x$

POLOROVINA s hran. př. $y=-2x$

(obs. např. $[-1,0]$)

x	0	1
y	0	-2

- zk. $[1,0]$ $y \leqq -2x$
  $0 \leqq -2$ nepl. $\Rightarrow$ opač. polor. (obs. např. $[-1,0]$)

d) $\left|z - \frac{1}{1+i}\right| < |z|$

2.2 b)

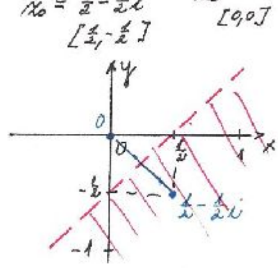
$\left|z - \frac{1}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}\right| < |z|$

$\left|z - \frac{1-i}{\underbrace{1^2-i^2}_{+1}}\right| < |z|$

$\left|z - \frac{1-i}{2}\right| < |z|$

(*) $\left|z - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right| < |z|$

$z_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ $[\frac{1}{2},-\frac{1}{2}]$ $\quad z_0 = 0$ $[0,0]$



dos. do (*) $z = x+yi$

$|x+yi - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i| < |x+yi|$

$|(x-\frac{1}{2}) + i(y+\frac{1}{2})| < |x+yi|$

$\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2} < \sqrt{x^2+y^2}$

$x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 + y + \frac{1}{4} < x^2+y^2$

$y - x + \frac{1}{2} < 0$

$2y - 2x + 1 < 0$

POLOROVINA s HRAN. PŘ. $y = x - \frac{1}{2}$ $(2y-2x+1=0)$

x	0	$\frac{1}{2}$
y	$-\frac{1}{2}$	0

- zk. $[0,0]$
  $y - x + \frac{1}{2} < 0$
  $0 - 0 + \frac{1}{2} < 0$ NEPL.
  $\Rightarrow$ OPAČNÁ